

$$f_1(x, g(x)) + f_2(x, g(x)) g'(x) = 0$$

potend

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

$$f_2(x_1, x_2)$$

nezávisí na x_2 , pak

existuje in tegeccar: faktor jako funkce x_1 .

Pakad

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

nezavisni na x_1

$$f_1(x_1, x_2)$$

paL existuje integraci! faktor jsko fun ce
 x_2 .

$$1) \quad 5xy(x) + 2y^2(x) + (x^2 + xy(x))y'(x) = 0$$

$$\text{Dabei sei } f_1(x_1, x_2) = 5x_1x_2 + 2x_2^2,$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2, \quad \text{mit}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 5x_1 + 4x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \neq \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

Prova: ce nemé exaktai. Na drubon strans

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$$

i.e.

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \frac{3}{x_1}$$

Leh hledá integrální faktor jako funkci x_1 . Z podmínky se parciální derivace dostává vám rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (F_1(x_1, x_2) \cdot g(x_1)) = \frac{\partial}{\partial x_1} (F_2(x_1, x_2) \cdot g(x_1))$$

$$g(x_1) \cdot (5x_1 + 4x_2) = g(x_1) \cdot (2x_1 + x_2) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1) \cdot (x_1^2 + x_1x_2)$$

$$\underline{g(x_1) \cdot \frac{3}{x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1)}$$

$g(x_1) = x_1^3$ je jedno řešení.

Všechny ostatní při vodní rovnici dostaneme

$$5x^4 y(x) + 2y(x)^2 x^3 + (x^5 + x^4 y(x)) y' = 0$$

Odkládáme $g_1(x_1, x_2) = 5x_1^4 x_2 + 2x_2^2 x_1^3$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1^5 + x_1^4 x_2$$

Platí $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$ rovnice je exaktní!

$$G(x_1, x_2) = \int g_1(x_1, x_2) dx_1 = x_1^5 x_2 + \frac{x_1^4 x_2^2}{2} + H(x_2)$$

$$x_1^5 + x_1^4 x_2 + \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_2) = \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$$

$$= x_1^5 + x_1^4 x_2$$

$$\Rightarrow H(x_2) = C$$

Dostáváme implicitně zadane řešení!

$$x^5 y(x) + \frac{x^4 y^3(x)}{2} = C$$

$$2) \quad y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 12x^2 + 2x + 1$$

Nesprávne riešenie odpovedajúcej homogénnej rovnici.

Charakteristický pol. má tvar:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

Fundamentální systém je tedy

$$\{e^{-3x}, e^{2x}\}$$

Pravá strana je tvaru

$$12x^2 + 2x + 1 = e^{0x} (12x^2 + 2x + 1) \cos(0x) + 0 \sin(0x)$$

i.e. je tvaru $e^{\lambda x} (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x))$

rr. $\lambda = \beta = Q(r) = 0$, $r(x)$ je pol. na levé straně.

0. zeige, dass $\cos$ char. polynom u. $\sin$ ist.

für $\cos$

$$y_0(x) = x^0 e^{0x} (R(x) \cos(0x) + \underbrace{S(x) \sin(0x)}_0) =$$

$$= R(x), \quad \deg R \leq 2$$

doz hře f_n

$$f_0(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'_0(x) = 2ax + b$$

$$f''_0(x) = 2a$$

Doz ter'ín do situací :

$$2a + 2ax + b - 6ax^2 - 6bx - 6c = 12x^2 + 2x + 1$$

z toho:

$$\left. \begin{array}{l} -6a = 12 \\ 2a - 6b = 2 \\ 2a + 6b - 6c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}$$

Tedy $y_0(x) = -2x^2 - x - 1$. Obecné řešení je

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$3) \quad y'''(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) = 8x e^x$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$$

Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 &= (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + i)(\lambda - i) \end{aligned}$$

Fund. sys. je

$$\{e^{-x}, \cos(x), \sin(x)\}.$$

Pravá strana je tvaru

$$f(x)e^x = e^{1-x} (f(x) \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0x))$$

1 není kořen char. polynomu.

Hierin setzen wir $y_0(x) = e^x(ax+b)$

$$y_0'(x) = e^x(ax+b) + e^x a = e^x(ax+a+b)$$

$$y_0''(x) = e^x(ax+a+b) + e^x a = e^x(ax+2a+b)$$

$$y_0'''(x) = e^x(ax+2a+b) + e^x a = e^x(ax+3a+b)$$

$$e^x(4x + 4b + 6a) = e^x(8x)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a = 8 \\ 4b + 6a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \end{array}$$

Dostáváme

$$y_0(x) = e^x (2x - 3)$$

Ověřme

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) + e^x (2x - 3)$$

$$f'(x) = -C_1 e^{-x} - C_2 \sin(x) + C_3 \cos(x) + e^x(2x-1)$$

$$f''(x) = C_1 e^{-x} - C_2 \cos(x) - C_3 \sin(x) + e^x(2x+1)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 - 3 \\ 1 &= -C_1 + C_3 - 1 \\ 1 &= C_1 - C_2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= C_2 = 2 \\ C_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$f_1(x) = 2e^{-x} + 2\cos(x) + 4\sin(x) + e^x(2x-3)$$

$$4) \quad y^{(4)}(x) - 10 y^{(2)}(x) + 25 y(x) = 1 + \sin(x)$$

Chr. pol. je

$$\lambda^4 - 10 \lambda^2 + 25 = (\lambda^2 - 5)^2 = (\lambda + \sqrt{5})^2 (\lambda - \sqrt{5})^2$$

Fundamentální systém má tvar

$$\{ e^{\sqrt{5}x}, x e^{\sqrt{5}x}, e^{-\sqrt{5}x}, x e^{-\sqrt{5}x} \}$$

$1 + \sin(x)$ není ve speciální formě, ale
 1 i $\sin(x)$ jsou

$$1 = e^{0x} (1 \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0x)). \quad \text{Dává mi kořen Ch. p.}$$

Hledám řešení tvaru $y_0(x) = C$. Dosazením

$$25C = 1 \quad \text{i.e.} \quad y_0(x) = \frac{1}{25}$$

$$\sin(x) = e^{0x} (0 \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(x)), \quad \text{i není kořen Ch. p.}$$

Hledám řešení tvaru

$$y_1 = a \cos(x) + b \sin(x)$$

$$y_1^{(2)}(x) = -a \cos(x) - b \sin(x)$$

$$y_1^{(4)}(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$$

Položím:

$$a \sin(x) + b \cos(x) + 10(a \sin(x) + b \cos(x)) + 25(a \sin(x) +$$

$$b \cos(x)) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow b = 0, \quad a = \frac{1}{36}$$

Obecné řešení je

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{7}x} + C_2 x e^{\sqrt{7}x} + C_3 e^{-\sqrt{7}x} + C_4 x e^{-\sqrt{5}x} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} \sin(x).$$